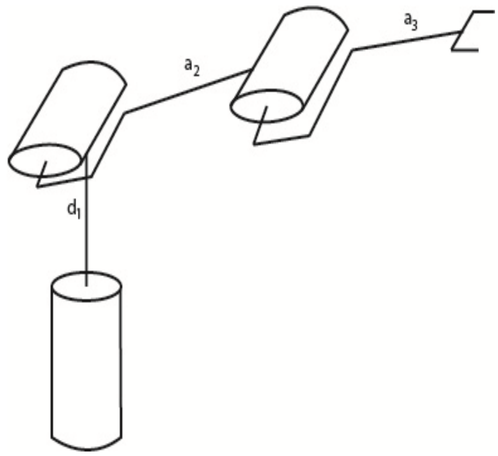
Notacja Denavita-Hartenberga

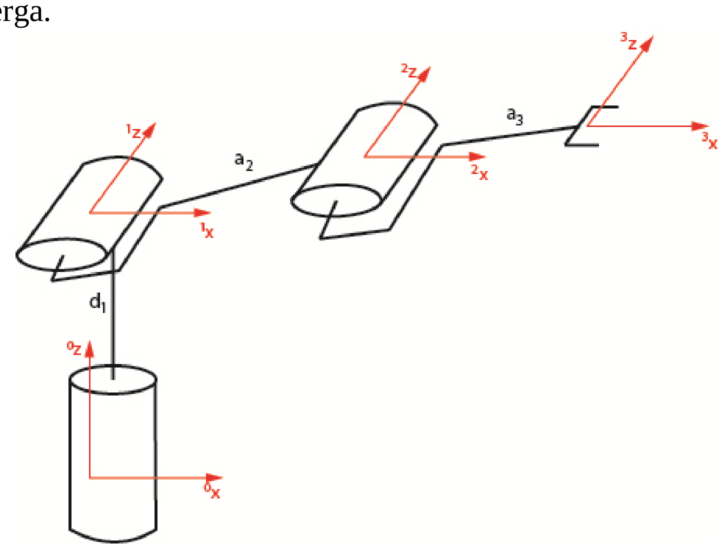
Materiały do ćwiczeń z Podstaw Robotyki - Artur Gmerek

Umiejętność rozwiązywania prostego zagadnienia kinematycznego jest najbardziej bazową umiejętność zakresu Robotyki.

Wyznaczyć parametry i zmienne złączowe przedstawionego na poniższym rysunku łańcucha kinematycznego.



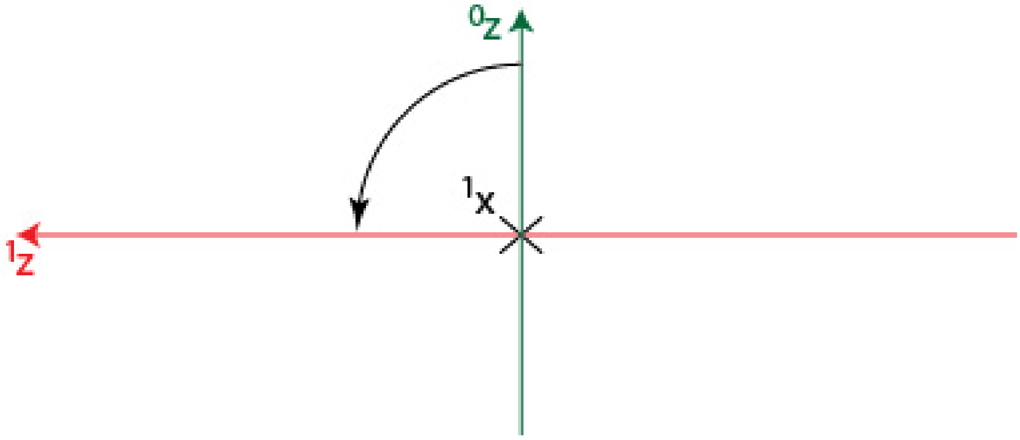
Rozwiązanie.
Rozwiązując podobne problemy w oparciu o uproszczone schematy kinematyczne można założyć, że odległości, które nie zostały podane przez autora są równe zero. Poza tym, odległości zaznaczone na rysunku są w istocie odległościami od poszczególnych osi obrotów.
Pierwszy krok polega na związaniu z przegubami manipulatora układów współrzędnych, na podstawie których zostaną wyznaczone parametry i zmienne złączowe, w oparciu o notację Denavita-Hartenberga.



W celu zwiększenia czytelności rysunku, nie zostały przedstawione osie $\boldsymbol{y}$ oraz niektóre układy kartezjańskie nie znajdują się w centralnej części symboli oznaczających poszczególne złącza. Osie $\boldsymbol{z}$ mają kierunek zgodny z osią obrotu, oś $\boldsymbol{x}$ jest natomiast wspólną normalną do osi złączy następnego i poprzedniego. Na rysunku oś $\boldsymbol{x}$ skierowana jest w stroną złączy o wyższych numerach (nie jest to jednak warunek konieczny poprawnego rozwiązania zadania), możliwe jest również inna orientacja układów współrzędnych. Układ współrzędnych związany z efektorem zależy od geometrii chwytaka, ale jeżeli jest to możliwe, to dla uproszczenia rozważań, można przyjąć taką samą orientację tego układu, jak układu przedostatniego.

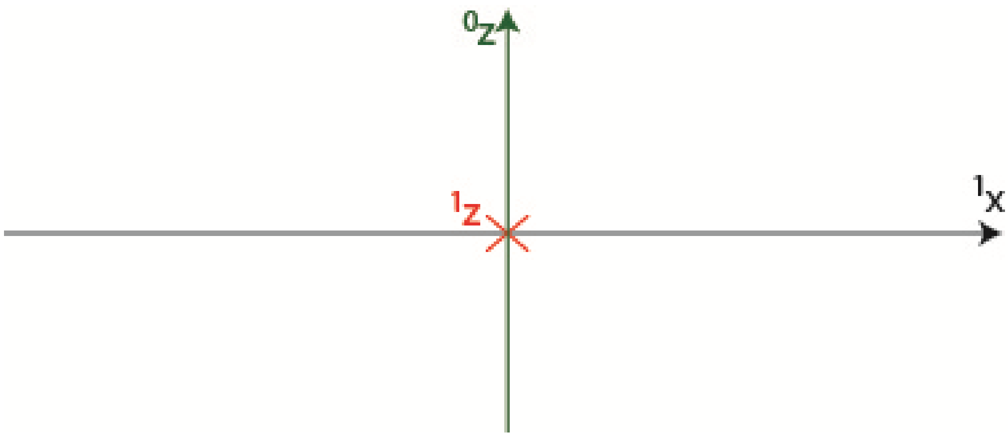
Następnym krokiem jest wyznaczanie zmiennych i parametrów złączowych, w oparciu o przytoczone definicje. Dla przykładu zostało to wykonane dla układu współrzędnych **1** względem **0**:

$\boldsymbol{\alpha}$ - jest to kąt mierzony wokół osi $^{1}\boldsymbol{x}$ od $^{0}\boldsymbol{z}$ do $^{1}\boldsymbol{z}$, zgodnie z zasadą śruby prawoskrętnej (kąt ma dodatnią wartość, gdy obrót jest zgodny z ruchem wskazówek zegara).Gdybyśmy przedłużyli w myślach oś $^{0}\boldsymbol{z}$, do tego stopnia, żeby przecięła się z układem współrzędnych oznaczonym numerem **1** i zrzutowali osie na płaszczyznę $\boldsymbol{zy}$ pierwszego układu otrzymalibyśmy obraz:

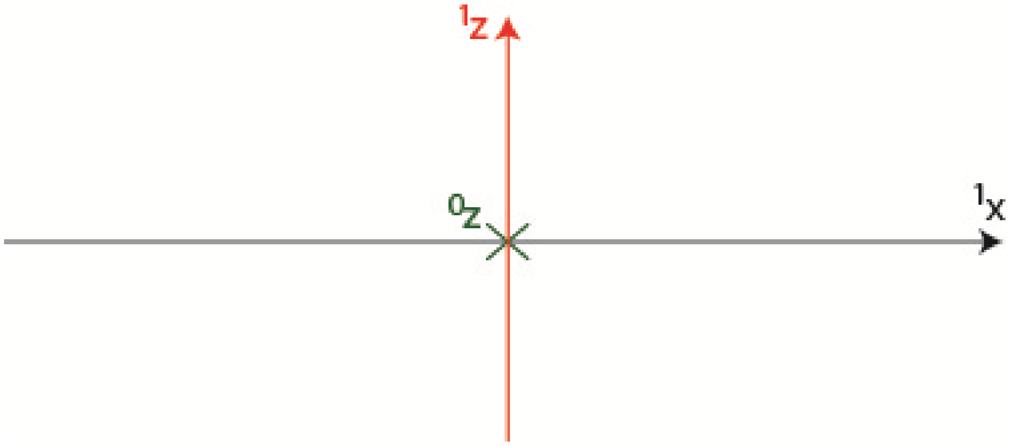


Ważne jest, żeby wyobrażając sobie ten rzut, **patrzeć w stronę, w którą podąża grot strzałki (strona wzrastających wartości)** (strzałka jest skierowana za monitor). W przeciwnym razie otrzymamy wyniki, jak dla lewoskrętnego układu współrzędnych i nie będą one zgadzać się z rysunkiem. Ze schematu widzimy, iż kąt pomiędzy osią $^{0}\boldsymbol{z}$, a osią $^{1}\boldsymbol{z}$, zgodnie z zasadą śruby prawoskrętnej wynosi $-\frac{\pi}{2}$ (oś poprzednią należy obrócić w stronę przeciwną do ruchu wskazówek zegara o 90 deg, aby pokryła się ona z osią następną).

$\boldsymbol{a}$ – jest odległością, dla pierwszego złącza, mierzoną wzdłuż osi $^{1}\boldsymbol{x}$ od $^{0}\boldsymbol{z}$ do $^{1}\boldsymbol{z}$
Rzutując w myślach potrzebne do wyznaczenia odległości osie na płaszczyznę $\boldsymbol{xy}$ układu współrzędnych z indeksem **1**, otrzymamy rysunek:



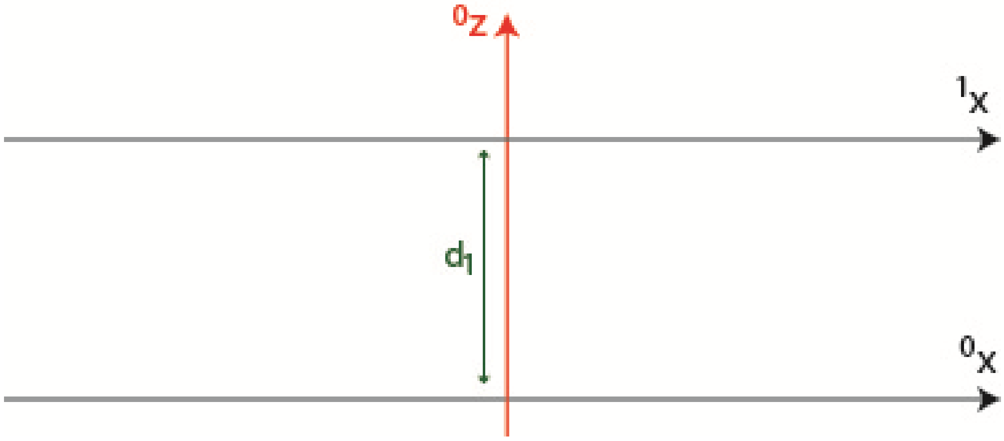
Patrząc natomiast z góry, czyli rzutując osie na płaszczyznę $\boldsymbol{xz}$ układu współrzędnych z indeksem **1** otrzymamy:



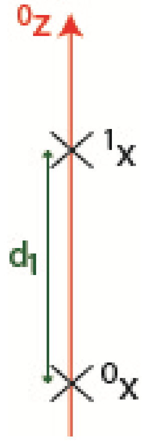
Z obu rysunków widać, że odległość pomiędzy osiami $\boldsymbol{z}$ na osi ${}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{x}$ jest równa 0 (osie zorientowane są tak samo). Zwróćmy również uwagę na to, że gdybyśmy skierowali oś ${}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{x}$ do góry nie otrzymalibyśmy zadowalającego rezultatu. Byłby to błąd, gdyż oś ${}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{x}$**,** nie byłaby wtedy wspólną normalną do osi złącza poprzedniego i następnego.

$\boldsymbol{d}$ – jest przesunięciem liniowym mierzonym wzdłuż osi ${}^{\mathbf{0}}\boldsymbol{z}$ od ${}^{\mathbf{0}}\boldsymbol{x}$ do ${}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{x}$.

Rzutując w myślach potrzebne do wyznaczenia odległości osie, na płaszczyznę $\boldsymbol{xz}$ układu współrzędnych z indeksem **0**, otrzymujemy rysunek:



Podobny wynik uzyskujemy rzutując osie na płaszczyznę $\boldsymbol{yz}$ układu współrzędnych z indeksem **0**:



A zatem odległość $\boldsymbol{d}$ wynosi $\boldsymbol{d_1}$

$\boldsymbol{\theta}$ - jest kątem, dla pierwszego złącza, mierzonym wokół osi ${}^{0}\boldsymbol{z}$ od ${}^{0}\boldsymbol{x}$ do ${}^{1}\boldsymbol{x}$, zgodnie z zasadą śruby prawoskrętnej.

Rzutując te osie na płaszczyznę $\boldsymbol{xy}$ pierwszego układu współrzędnych otrzymalibyśmy wynik, wskazujący na to, że osie **x** pokrywają się ze sobą (zerowy kąt). Jednakże ze względu na to, że z osią ${}^{0}\boldsymbol{z}$, związana jest oś obrotu, kąt ten może się zmieniać i dlatego oznaczamy go jako zmienną. Należy pamiętać, iż początkowy kąt wpisujemy do tabeli, mimo tego, że kąt theta jest zmienną. Pozwoli to na poprawne wyznaczenie pozycji początkowej manipulatora.

Rozważania te można powtórzyć również dla układów współrzędnych **2** względem **1** oraz **3** względem **2**. W ten sposób otrzymamy pełen opis kinematyki robota z wykorzystaniem notacji D-H:

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{a_i}$	$\boldsymbol{\alpha_i}$	$\boldsymbol{d_i}$	$\boldsymbol{\theta_i}$
1	0	$-\frac{\pi}{2}$	d_1	$\theta_1^* + 0$
2	a_2	0	0	$\theta_2^* + 0$
3	a_3	0	0	$\theta_3^* + 0$

Macierz jednorodną przekształcenia ostatniego układu współrzędnych (związanego z efektorem) do układu bazowego można wyliczyć ze wzoru:

$$ {}^{0}H_3 = {}^{0}H_1 \cdot {}^{1}H_2 \cdot {}^{2}H_3 $$

Poszczególne macierze, wyznaczone ze wzoru:

$$ {}^{0}H_1 = Rot(Z,\theta_1)Trans(0,0,d_1)Trans(a_1 = 0,0,0)Rot\left(X,-\frac{\pi}{2}\right) $$

$$ = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Pozostałe macierze zostały obliczone w ten sam sposób.

$$ {}^{0}H_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; {}^{1}H_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; {}^{2}H_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Po wymnożeniu macierzy przez siebie otrzymujemy wynik:

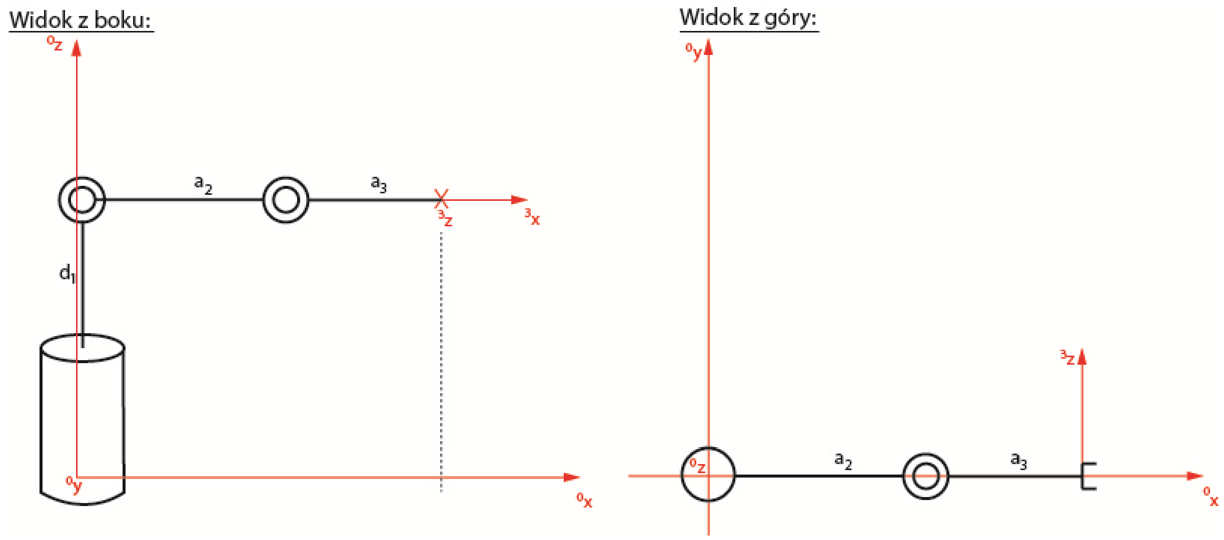
$$ {}^{0}H_3 = {}^{0}H_1 \cdot {}^{1}H_2 \cdot {}^{2}H_3 = \begin{bmatrix} c_{23}c_1 & -s_{23}c_1 & -s_1 & c_1(a_3c_{23} + a_2c_2) \\ s_1c_{23} & -s_{23}s_1 & c_1 & s_1(a_3c_{23} + a_2c_2) \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & d_1 - a_3s_{23} - a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Do wyrażenia macierzy zostały użyte uproszczenia.
$cos\theta_1 = c_1$
$sin\theta_1 = s_1$
$cos(\theta_1 + \theta_2) = c_{12}$
$sin(\theta_1 + \theta_2) = s_{12}$

Analiza poprawności rozwiązania:

W tym miejscu warto jest zastanowić się, czy uzyskany wynik jest prawidłowy. Otrzymana macierz musi być macierzą jednorodną. Macierz ma poprawną postać macierzy blokowej (w dolnym wierszu 3 zera w trzech pierwszych kolumnach i 1 w ostatniej). Po obliczeniu w myślach norm i iloczynów skalarnych trzech pierwszych wektorów wewnętrznej macierzy rotacji widzimy także, że wyniki są zgodne z naszymi oczekiwaniami ($\|a\| = \|b\| = \|c\| = 1$ oraz $a°b = b°c = c°a = 0$). Iloczyny wektorowe również wskazują na to, że jest to macierz jednorodna przekształcenia DH. Warto jest sprawdzić na każdym etapie obliczeń chociaż cześć własności macierzy. Będzie to gwarantować prawidłowość wyników.

Patrząc się na poszczególne składniki macierzy, możemy poza tym stwierdzić, że jest ona względnie prawidła. Przykład mogą stanowić funkcje trygonometryczne, sumy kątów. Otóż drugie i trzecie złącze jest usytuowane w tym samym kierunku. Z tego powodu w macierzy występuje suma tych kątów (składniki $\boldsymbol{c_{23}}, \boldsymbol{s_{23}}$).
Dobre wyniki uzyskujemy studiując również np. trzecią kolumnę - orientacja osi $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ układu podstawowego, w stosunku do osi $\boldsymbol{z}$ efektora zależy tylko o zmiennej $\boldsymbol{\theta_1}$ (obrotu pierwszego złącza). Manipulator ma taką strukturę kinematyczną, że nie można zmienić orientacji osi $\boldsymbol{z}$ układu podstawowego, w stosunku do osi $\boldsymbol{z}$ układu efektora, co również ma swoje odzwierciedlenie w macierzy obrotu ($H_{(3,3)} = 0$).
Zbadajmy, czy uzyskane rezultaty dają spodziewane wyniki dla jakiejś konfiguracji, którą jesteśmy sobie w stanie łatwo wyobrazić, np. dla przypadku, gdy kąty $\boldsymbol{\theta_1}, \boldsymbol{\theta_2}, \boldsymbol{\theta_3}$ są równe zero. W tym przypadku manipulator ustawiony jest w następującym położeniu:



Z rysunku widzimy, że położenie efektora na osi $\boldsymbol{z}$ jest równe $\boldsymbol{d_1}$, na osi $\boldsymbol{x}$ wynosi $\boldsymbol{a_2 + a_3}$, a na osi $\boldsymbol{y}$ jest równe $\mathbf{0}$. Jednocześnie orientacja osi ${}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{x}$ układu współrzędnych związanego z efektorem pokrywa się z osią ${}^{\mathbf{0}}\boldsymbol{x}$ układu podstawowego, orientacja osi ${}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{y}$ jest taka, jak osi $-{}^{\mathbf{0}}\boldsymbol{z}$ układu podstawowego, natomiast oś ${}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{z}$ układu efektorowego, pokrywa się z osią ${}^{\mathbf{0}}\boldsymbol{y}$ układu podstawowego.
Podstawiając do obliczonej macierzy wartości zerowe kątów $\boldsymbol{\theta_1, \theta_2, \theta_3}$ otrzymujemy:

$$
{}^{0}H_3(\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

A zatem wyniki zgadzają się z naszą analizą.

Mając pewność, iż model kinematyczny jest policzony prawidłowo można przejść do wyznaczenia jakobianów, odwrotnego zagadnienia kinematycznego, planowania trajektorii i modelowania dynamicznego.