

Podstawy Robotyki - ćwiczenia, Zajęcia nr 3

Temat: **Macierze obrotu**

Studium przypadku obrót wokół wybranej osi (*kontynuacja wyprowadzenia z poprzednich zajęć*)



Właściwości macierzy obrotu

1. Macierz obrotu jest ortonormalna:

$${}^iR_j^{-1} = ({}^iR_j)^{-1} = ({}^iR_j)^T$$

W prawoskrętnym układzie współrzędnych: $\det ({}^iR_j) = 1$

2. Dla macierz obrotu przedstawionej w postaci kolumnowej (${}^iR_j = [\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]$) zachodzą następujące związki:

a. $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\| = 1$

b. $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{b} \circ \mathbf{c} = \mathbf{c} \circ \mathbf{a} = \mathbf{0}$

c. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a}, \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$

3. Macierze obrotów podstawowych:

$$R(X, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, R(Y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, R(Z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

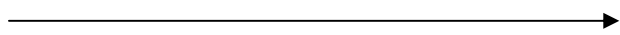
Zadanie 1: Sprawdzić czy podane macierze mogą być macierzami obrotu

Zadanie 2: Wyznaczyć brakujące elementy macierzy obrotu

Złożenie obrotów

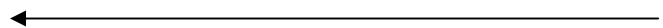
Macierze obrotów złożonych, w wyniku obrotów wokół bieżących układów współrzędnych:

$${}^0p = {}^0R_1({}^0x, \theta_1) {}^1R_2({}^1z, \theta_2) \dots {}^{l-1}R_l({}^{l-1}y, \theta_l) {}^lp$$



Wzór na macierz obrotu złożonej, w wyniku obrotu wokół ustalonego układu współrzędnych:


$${}^0p = {}^0R_1({}^0x, \theta_l) {}^1R_2({}^0z, \theta_{l-1}) \dots {}^{l-1}R_l({}^0y, \theta_1) {}^lp$$



Zadanie 3: Wyznaczyć wypadkową macierz obrotu odpowiadającą złożeniu obrotu o kąt wokół osi, a następnie obrotu wokół bieżącej osi o kąt

Zadanie 4: Wyznaczyć wypadkową macierz obrotu odpowiadającą złożeniu obrotu o kąt wokół osi, a następnie obrotu wokół bieżącej osi o kąt

Zadanie 5: Wyznaczyć wypadkową macierz obrotu odpowiadającą złożeniu obrotu o kąt wokół osi, a następnie obrotu wokół ustalonej osi o kąt

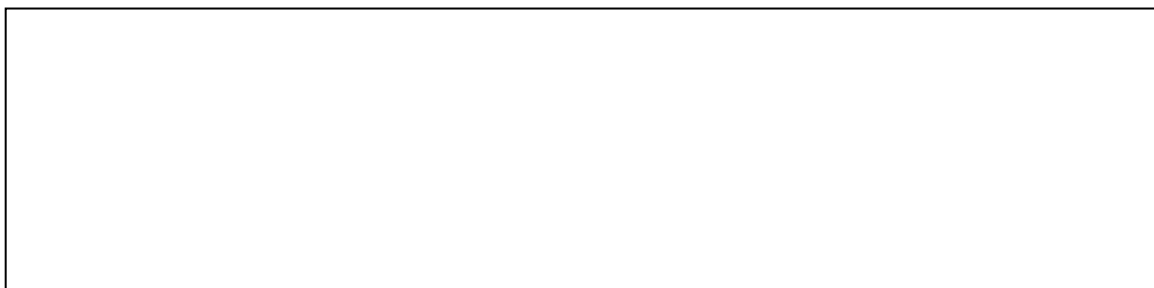


Obrót wokół dowolnej osi

Jeżeli obrót został wykonany wokół wektora $v = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ o kąt θ , to macierz obrotu można wyrazić poprzez macierze obrotów podstawowych:

$$R(v, \theta) = {}^0R_1({}^0z, \alpha) {}^1R_2({}^0y, \beta) {}^2R_3({}^0z, \theta) {}^3R_4({}^0y, -\beta) {}^4R_5({}^0z, -\alpha)$$

rysunek:



Zadanie 6: Kartezjański prawoskrętny układ współrzędnych obrócono wokół wektora $v=[\dots \dots \dots]^T$ o kąt \dots . Wyznaczyć macierz obrotu.

Praca domowa:

Zadanie 1:

Jakie są właściwości macierzy obrotu w lewoskrętnym układzie kartezjańskim? (wyprowadzić)

Zadanie 2:

Przedstawić wypadkową macierz obrotu $R=[\dots \dots \dots ; \dots \dots \dots ; \dots \dots \dots]$, jako złożenie obrotów podstawowych wokół osi bieżących układów współrzędnych.